大学数学のアトリエ｜線形代数　第 5 章　線形写像

No.4　表現行列

この回のゴール

- 基底を決めたときの線形写像の表現行列を定義し，求められる．
- 「$\boldsymbol{x}$ の座標に表現行列を掛けると $f(\boldsymbol{x})$ の座標になる」ことを説明できる．
- 合成写像の表現行列が表現行列の積になることを使える．
- 同じ線形写像でも，基底の取り方で表現行列が変わることを例で説明できる．

以下，V，W を有限次元のベクトル空間，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．

■ 1. 表現行列の定義

No.1 定理 2 では，$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の線形写像を「$f(\boldsymbol{e}_j)$ を第 j 列に並べた行列」で表した．一般の V，W でも，基底を 1 つずつ決めれば同じことができる．

定義 1　表現行列

V の基底 $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ と W の基底 $(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)$ を決める．各 $f(\boldsymbol{v}_j)$ を W の基底で表して

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m \qquad (j = 1, \dots, n)$$

とするとき，$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を，これらの基底に関する f の**表現行列**という．

作り方

$f(\boldsymbol{v}_j)$ の（W の基底に関する）座標を，第 j 列に並べる．
これを形式的に

$$\big(f(\boldsymbol{v}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{v}_n)\big) = (\boldsymbol{w}_1\ \cdots\ \boldsymbol{w}_m)\,A$$

と書くことがある（右辺は「行列の積」と同じ規則で，ベクトルの 1 次結合を並べたもの）．

例 1

$V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ で, どちらも標準基底をとると, 表現行列は No.1 定理 2 の $A = (f(\boldsymbol{e}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{e}_n))$ と一致する．

例題 1

微分 $D\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2$ の，基底 $(1, x, x^2, x^3)$ と $(1, x, x^2)$ に関する表現行列を求めよ．

【解答】

$$D(1) = 0, \qquad D(x) = 1, \qquad D(x^2) = 2x, \qquad D(x^3) = 3x^2.$$

それぞれの $(1, x, x^2)$ に関する座標 ${}^t(0, 0, 0)$，${}^t(1, 0, 0)$，${}^t(0, 2, 0)$，${}^t(0, 0, 3)$ を列に並べて

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

■ 2. 座標と表現行列

定理 1

f の表現行列を A とする．$\boldsymbol{x} \in V$ の座標を ${}^t(x_1, \ldots, x_n)$，$f(\boldsymbol{x})$ の座標を ${}^t(y_1, \ldots, y_m)$ とすると

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

【証明】$f(\boldsymbol{x}) = f\left(\sum_j x_j \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_j x_j f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_j x_j \sum_i a_{ij} \boldsymbol{w}_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \boldsymbol{w}_i$．座標は一意なので $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$，つまり $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$．　□

座標写像（No.3 定理 6）を $\varphi_V : V \to \mathbb{R}^n$，$\varphi_W : W \to \mathbb{R}^m$ とすると，定理 1 は次の図で表される．

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\ f\ } & W \\ {\scriptstyle \varphi_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_W} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[A \text{ を掛ける}]{} & \mathbb{R}^m \end{array} \qquad \text{上を回っても下を回っても同じ（} \varphi_W \circ f = f_A \circ \varphi_V \text{）}$$

「抽象的な空間の線形写像」は，基底を決めると「座標に行列を掛ける」という計算に置き換えられる．

例題 2

例題 1 の表現行列を使って，$f = 4 - x + 5x^2 + 2x^3$ の微分を求めよ．

【解答】 f の座標は ${}^t(4, -1, 5, 2)$ なので，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

よって $f' = -1 + 10x + 6x^2$．（直接微分した結果と一致する．）

■ 3. 基底を変えると表現行列が変わる

同じ線形写像でも，基底の選び方で表現行列は変わる．うまく基底を選ぶと，表現行列がとても簡単になることがある．

例題 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が定める線形変換 $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について，基底 $\boldsymbol{v}_1 = {}^t(1, 1)$，$\boldsymbol{v}_2 = {}^t(1, -1)$（定義域・値域とも同じ基底を使う）に関する表現行列を求めよ．

【解答】

$$f_A(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2, \qquad f_A(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{v}_1 + (-1)\boldsymbol{v}_2.$$

座標 ${}^t(3, 0)$，${}^t(0, -1)$ を列に並べて，表現行列は $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

コラム：対角化の予告

標準基底では $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ だった変換が，基底 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ では**対角行列**になった．$\boldsymbol{v}_1$ 方向には 3 倍，$\boldsymbol{v}_2$ 方向には -1 倍するだけ，という変換の正体が見えたことになる．このように「表現行列が対角行列になる基底」を探すのが第 6 章の**対角化**であり，$f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{v}$ を**固有ベクトル**という．

■ 4. 合成と逆写像

定理 2　合成の表現行列

$f\colon V \to W$，$g\colon W \to U$ を線形写像とし，V，W，U の基底を 1 つずつ決める．f の表現行列を A，g の表現行列を B とすると，$g \circ f$ の表現行列は BA である．

【証明】 $\boldsymbol{x}$ の座標を $\boldsymbol{x}'$ とすると，定理 1 より $f(\boldsymbol{x})$ の座標は $A\boldsymbol{x}'$，$g(f(\boldsymbol{x}))$ の座標は $B(A\boldsymbol{x}') = (BA)\boldsymbol{x}'$．これがすべての $\boldsymbol{x}$ で成り立つので，$g \circ f$ の表現行列は BA（V の基底ベクトル $\boldsymbol{v}_j$ の座標 $\boldsymbol{e}_j$ を代入すると第 j 列が一致する）．□

注意

順番に注意．「f してから g」は $g \circ f$ と書き，表現行列は BA（あとに行う方が**左**）．

定理 3　同型写像の表現行列

$\dim V = \dim W = n$ とし，f の表現行列を A とする．f が同型写像 $\iff$ A が正則．このとき f^{-1} の表現行列は A^{-1}．

【証明】 定理 1 より，f が単射 $\iff$「$A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ なら $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$」$\iff$ A が正則（第 2 章 No.3 定理 5）．次元が等しいので単射と同型は同値（No.3 定理 2 (4)）．$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ の表現行列は E なので，定理 2 より（f^{-1} の表現行列）$\cdot A = E$．□

コラム：回転と加法定理

$\mathbb{R}^2$ の回転 R_θ の表現行列（標準基底）は $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ だった．β 回転してから α 回転すると $\alpha+\beta$ 回転になる（$R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}$）ので，定理 2 より

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}.$$

左辺を計算して成分を比べると，三角関数の**加法定理**がそのまま出てくる（練習問題 6）．

■ 練習問題

1. 微分 $D\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ について，次に答えよ．

(1) 基底 $(1,\, x,\, x^2)$ に関する表現行列 A を求めよ．

(2) $A^3 = O$ を確かめ，その意味を説明せよ．

(3) 基底 $\left(1,\, x,\, \frac{1}{2}x^2\right)$ に関する表現行列を求めよ．

2. 転置 $T\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$，$T(X) = {}^tX$ の，基底 $(E_{11},\, E_{12},\, E_{21},\, E_{22})$ に関する表現行列を求めよ．

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ が定める $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の，基底 $({}^t(1,\, 1),\ {}^t(1,\, -1))$ に関する表現行列を求めよ．

4. $f\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$，$f(p) = p(x+1) - p(x)$（No.3 例題 1）の，基底 $(1,\, x,\, x^2)$ に関する表現行列を求め，そのランクが $\dim \mathrm{Im}\, f$ と一致することを確かめよ．

5. $T\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$，$T(f) = {}^t\big(f(0),\, f(1),\, f(2)\big)$ の，基底 $(1,\, x,\, x^2)$ と標準基底に関する表現行列を求めよ．また，それが正則であることから T が同型写像であることを確かめよ．

6.（考えてみよう）コラムの行列の積を計算して，$\cos(\alpha+\beta)$ と $\sin(\alpha+\beta)$ の加法定理を導け．

■ 練習問題の解答

1. (1) $D(1) = 0$，$D(x) = 1$，$D(x^2) = 2x$ より $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^3 = O$．定理 2 より A^3 は $D \circ D \circ D$ の表現行列なので，「2 次以下の多項式を 3 回微分すると 0 になる」ことを表している．

(3) $D(1) = 0$，$D(x) = 1$，$D(\frac{1}{2}x^2) = x$ なので，表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．基底を変えると，(1) の成分の 2 が 1 になった．

2. $T(E_{11}) = E_{11}$，$T(E_{12}) = E_{21}$，$T(E_{21}) = E_{12}$，$T(E_{22}) = E_{22}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $f_A{}^t(1,\, 1) = {}^t(3,\, 3) = 3\boldsymbol{v}_1$，$f_A{}^t(1,\, -1) = {}^t(1,\, -1) = \boldsymbol{v}_2$ より $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．

4. $f(1) = 0$，$f(x) = 1$，$f(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 1 + 2x$ より $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．ランクは 2 で，No.3 例題

1 の $\dim \operatorname{Im} f = 2$ と一致する．

5. $T(1) = {}^t(1,\,1,\,1)$, $T(x) = {}^t(0,\,1,\,2)$, $T(x^2) = {}^t(0,\,1,\,4)$ より $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$．行列式は $2 \neq 0$ で正則なので，定理 3 より T は同型写像（No.2 例題 3 の結果と一致）．

6. 左辺 $= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$．$(1,1)$ 成分と $(2,1)$ 成分を比べて

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$